



# PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

## BÀI: CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

**Câu 1:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$  và  $(Q): x - y - 4 = 0$ . Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  (đơn vị độ).

**Lời giải**

**Trả lời: 45**

VTPT của mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  lần lượt là:  $\vec{n}_1 = (2; -1; 2)$ ,  $\vec{n}_2 = (1; -1; 0)$ .

$$\text{Ta có } \cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|2 \cdot 1 + (-1)(-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow ((P), (Q)) = 45^\circ.$$

**Câu 2:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$  và mặt phẳng  $(Q): 2x - y + 5z + 2 = 0$ . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng  $(P)$ ,  $(Q)$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,85**

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$  là  $\vec{n}_p = (1; -2; 2)$ , vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(Q)$  là  $\vec{n}_q = (2; -1; 5)$ .

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_p, \vec{n}_q) \right| = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{n}_p| |\vec{n}_q|} = \frac{|1 \cdot 2 + (-2)(-1) + 2 \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{14}{3\sqrt{30}}.$$

**Câu 3:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x - y - 2z - 1 = 0$  và mặt phẳng  $(Q)$ . Biết hình chiếu của gốc  $O$  lên  $(Q)$  là điểm  $H(2; -1; 0)$ . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,55**

Từ giả thiết, suy ra  $\vec{OH} = (2; -1; 0)$  là một VTPT của mặt phẳng  $(Q)$ .

Mặt phẳng  $(P)$  có VTPT  $\vec{n}_p = (1; -1; -2)$ .

Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_p, \vec{OH}) \right| = \frac{|2 \cdot 1 + (-1)(-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

**Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxyz$ , góc (tính theo đơn vị độ) giữa hai mặt phẳng  $(P): x - y + 2z + 5 = 0$  và  $(Q): 2x + y + z - 2 = 0$  bằng.

**Lời giải**

**Trả lời: 60**

$$\text{Ta có: } \cos((P), (Q)) = \frac{|1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra:  $((P), (Q)) = 60^\circ$ .

**Câu 5:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x - z - 3 = 0$  và mặt phẳng  $(Q)$ , biết hình chiếu vuông góc của  $O$  lên mặt phẳng  $(Q)$  là điểm  $H(2; 2; -1)$ . Khi đó góc (tính theo đơn vị độ) giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  bằng.

**Lời giải**

**Trả lời: 45**

Ta có:  $\vec{n}_P = (1; 0; -1)$ ,  $\vec{n}_Q = \vec{OH} = (2; 2; -1)$ .

$$\text{Suy ra: } \cos((P), (Q)) = \frac{|1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra:  $((P), (Q)) = 45^\circ$ .

**Câu 6:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x - y + 2 = 0$  và mặt phẳng  $(Q): (m+3)x + my + mz + 5 = 0$ , biết góc giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  bằng  $30^\circ$ , khi đó giá trị của  $m$  bằng

**Lời giải**

**Trả lời: -1**

Ta có:  $\vec{n}_P = (1; -1; 0)$ ,  $\vec{n}_Q = (m+3; m; m)$ .

$$\text{Suy ra: } \cos((P), (Q)) = \frac{|m+3-m|}{\sqrt{(m+3)^2 + m^2 + m^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{3m^2 + 6m + 9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 3m^2 + 6m + 9 = 6 \Leftrightarrow 3m^2 + 6m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

Vậy  $m = -1$ .

**Câu 7:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $M(1; 0; 0)$ ,  $N(0; 1; 0)$ ,  $P(0; 0; 1)$ . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng  $(MNP)$  và mặt phẳng  $(Oxy)$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,58**

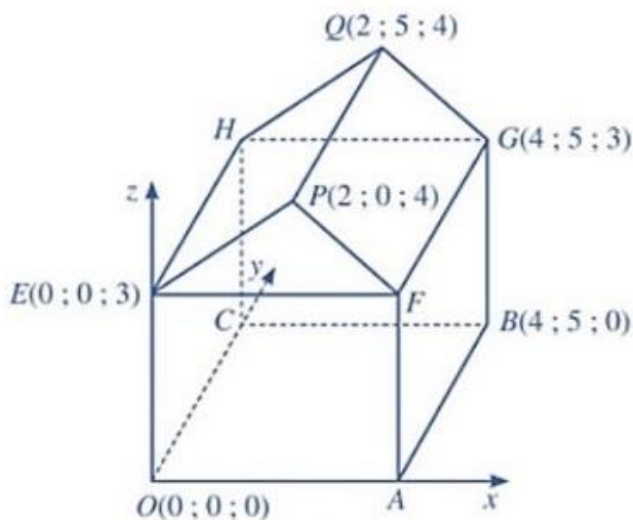
Mặt phẳng  $(MNP)$  có một VTPT là  $\vec{n} = [\vec{MN}; \vec{MP}] = (1; 1; 1)$ .

Mặt phẳng  $(Oxy)$  có một VTPT là  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .

Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(MNP)$  và  $(Oxy)$ .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \vec{k}) \right| = \frac{|1.0 + 1.0 + 1.1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**Câu 8:** Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Biết các tọa độ cho như hình vẽ. Tính độ dốc của mái nhà, tức góc tạo bởi mái nhà so với nền nhà (đơn vị độ, làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



**Lời giải**

**Trả lời: 26,6**

Độ dốc của mái nhà, tức là số đo của góc tạo bởi hai mặt lần lượt là  $(OABC)$  và  $(FGQP)$ .

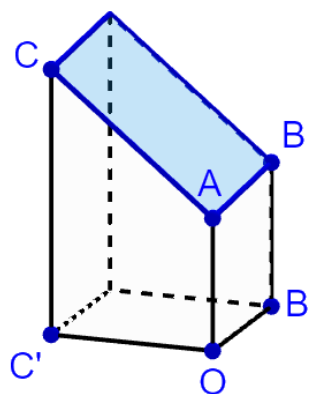
Mặt phẳng  $(FGQP)$  có một VTPT là  $\vec{n} = [\vec{QP}; \vec{QG}] = (5; 0; 10)$ .

Mặt phẳng  $(OABC)$  chính là mặt phẳng  $(Oxy)$  có một VTPT là  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .

Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(FGHE)$  và  $(Oxy)$ .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \vec{k}) \right| = \frac{|5.0 + 0.0 + 10.1|}{\sqrt{5^2 + 0^2 + 10^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \text{ Do đó } \varphi \approx 26,6^\circ$$

**Câu 9:** Một căn gác có chiếc cửa sổ trời như hình vẽ. Tính góc (theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng phần mười) giữa mặt nghiêng của chiếc cửa sổ trời với mặt sàn. Biết rằng khi mặt trời chiếu vuông góc với mặt sàn thì hình chiếu của chiếc cửa sổ là một hình vuông có cạnh 1,5m và chiều cao so với mặt sàn của các điểm  $A, B, C$  lần lượt là 1,2 m, 1,3 m và 2,4 m (xem hình vẽ minh họa). (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



**Lời giải**

**Trả lời:** 38,8

Gọi  $O, B', C'$  lần lượt là hình chiếu của  $A, B, C$  lên sàn nhà.

Ta gán trục tọa độ như sau: Tia  $Ox$  trùng với  $OB'$ ,  $Oy$  trùng với  $OC'$ ,  $Oz$  trùng với  $OA$ , mỗi đơn vị trên trục tọa độ ứng với 10 cm trong thực tế. Khi đó ta có tọa độ của các điểm như sau:

$$O(0;0;0), A(0;0;12), B(15;0;13), C(0;15;24) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(15;0;1), \overrightarrow{AC}(0;15;12).$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-15; -180; 225).$$

$$\text{Mặt nghiêng của cửa sổ có vector pháp tuyến: } \vec{n}_2 = \frac{1}{15} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; -12; 15)$$

Mặt sàn trùng với mặt phẳng  $Oxy$  suy ra có vector pháp tuyến  $\vec{n}_1 = (0;0;1)$ .

$$\Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|15|}{\sqrt{(-1)^2 + (-12)^2 + 15^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{3\sqrt{370}}{74}$$

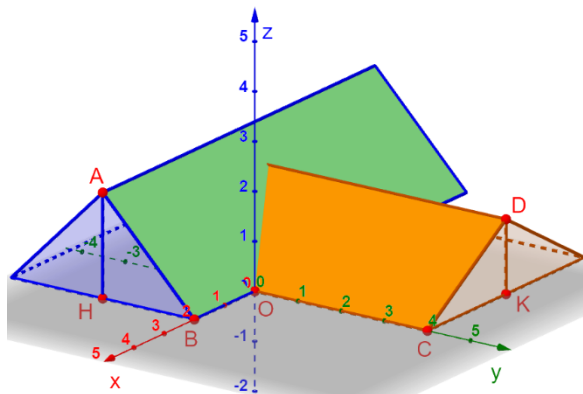
$$\Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) \approx 38,8^\circ.$$

**Câu 10:** Một ngôi nhà gồm hai phần mái dốc số 1 và số 2 (tham khảo hình vẽ bên dưới), Biết rằng số đo của các cạnh  $AB = 3\text{m}$ ,  $BO = 2\text{m}$ ,  $OC = 4\text{m}$ ,  $CD = 3\text{m}$  và độ dốc của mái số 1 bằng  $45^\circ$ , độ dốc của mái số 2 bằng  $30^\circ$ . Giả sử các mặt bên của tòa nhà vuông góc với nhau, khi đó góc (tính theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng phần mười) giữa hai mặt phẳng  $(ABO)$  và  $(CDO)$  bằng



**Lời giải**

**Trả lời:** 52,2



Ta gán trục tọa độ như sau: Tia  $Ox$  trùng với  $OB$ ,  $Oy$  trùng với  $OC$ ,  $Oz$  trùng với trục thẳng đứng, mỗi đơn vị trên trục tọa độ ứng với 1m trong thực tế. Khi đó ta có tọa độ của các điểm như sau:

$$O(0;0;0), B(2;0;0), C(0;4;0) \Rightarrow \overrightarrow{BO} = (-2;0;0), \overrightarrow{CO} = (0;-4;0)$$

Do độ dốc của mái 1 (màu xanh) là  $45^\circ$

$$\Rightarrow HB = AB \cdot \cos 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2}; AH = AB \cdot \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A\left(2; -\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \left(0; -\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Do độ dốc của mái 2 (màu cam) là  $30^\circ$

$$\Rightarrow KC = CD \cdot \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}; DK = CD \cdot \sin 45^\circ = \frac{3}{2} \Rightarrow D\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; 4; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}] = (0; 3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}) \Rightarrow \vec{n}_1 = (0; 1; 1)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CD}] = (-6; 0; -6\sqrt{3}) \Rightarrow \vec{n}_2 = (1; 0; \sqrt{3}).$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\sqrt{3}|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+0^2+\sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) \approx 52, 2^\circ.$$

**Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$  cho hai đường thẳng  $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}, d_2: \begin{cases} x=2t \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases}$ . Gọi  $j$  là góc

giữa hai đường thẳng  $d_1, d_2$ . Giá trị  $\cos j$  có dạng  $\frac{a\sqrt{5}}{b}$  ( $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản và  $a, b \in \mathbb{N}$ ).

Tính giá trị biểu thức  $P = b - 3a$ ?

**Lời giải**

**Trả lời: 3**

Ta có  $\vec{u}_{d_1} = (-1; 2; 2), \vec{u}_{d_2} = (2; 0; -1)$

$$\text{Khi đó } \cos j = \frac{|\vec{u}_{d_1} \cdot \vec{u}_{d_2}|}{|\vec{u}_{d_1}| |\vec{u}_{d_2}|} = \frac{|-1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}.$$

$$\text{Vậy } a = 4, b = 15 \Rightarrow b - 3a = 15 - 3 \cdot 4 = 3$$

**Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$  cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-4; 7; 5)$ . Tọa độ chân đường phân giác góc  $\hat{ABC}$  của tam giác  $ABC$  là  $I(a; b; c)$ . Tính tổng  $a + b + c$ ?

**Lời giải**

**Trả lời: 4**

$$\text{Ta có: Ta có phương trình đường thẳng } AC \text{ là } \begin{cases} x=1-5t \\ y=2+5t \\ z=-1+6t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Gọi  $I$  là chân đường phân giác góc  $\hat{ABC}$  của tam giác  $ABC \Rightarrow I(1-5t; 2+5t; -1+6t)$ .

$$\text{Lại có } \vec{BA} = (-1; 3; -4), \vec{BC} = (-6; 8; 2), \vec{BI} = (-5t-1; 5t+3; 6t-4).$$

Vì  $I$  là chân đường phân giác góc  $\hat{ABC}$  của tam giác nên  $ABC$ :

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BI}) &= \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BI}|} = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BI}|} \\ &\Leftrightarrow \frac{5t+1+15t+9+16-24t}{\sqrt{(-1)^2+3^2+(-4)^2}} = \frac{30t+6+40t+24+12t-8}{\sqrt{(-6)^2+8^2+2^2}} \Leftrightarrow \frac{-4t+26}{\sqrt{26}} = \frac{82t+22}{\sqrt{104}} \\ &\Leftrightarrow -8t+52 = 82t+22 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow I\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right). \\ \text{Vậy } a &= -\frac{2}{3}, b = \frac{11}{3}, c = 1 \Rightarrow a+b+c = -\frac{2}{3} + \frac{11}{3} + 1 = 4 \end{aligned}$$

**Câu 13:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $D: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = -2-t \end{cases}$  và  $(P): -x+2y+2z+5=0$ . Gọi  $d$  là đường thẳng đi qua điểm  $A(-1;0;-1)$  cắt đường thẳng  $D_1$  và tạo với đường thẳng  $D_2$  một góc nhỏ nhất. Vector chỉ phương  $\overrightarrow{u_d} = (a; b; c)$ . Tính tổng  $a+2b-3c$ ?

**Lời giải**

**Trả lời: 9**

Giả sử đường thẳng  $d$  cắt đường thẳng  $D_1$  tại  $B$ , ta có:  $B(1+2t; 2+t; -2-t) \in D_1$ .

Đường thẳng  $d$  có VTCP là:  $\overrightarrow{AB} = (2t+2; t+2; -t-1)$ , mặt phẳng  $(P)$  có VTPT  $\overrightarrow{n} = (-1; 2; 2)$ .

Gọi  $j$  là góc giữa  $d$  và  $D_2$ , ta có:  $\sin j = \frac{|-2t-2+2t+4-2t-2|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}} = \frac{|2t|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}} \geq 0, \Rightarrow d$

tạo với đường thẳng  $D_2$  một góc  $j$  nhỏ nhất khi  $j = 0^\circ$  hay  $\sin j = 0 \Rightarrow t = 0$ .

Khi đó đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(-1;0;-1)$  và có VTCP  $\overrightarrow{AB} = (2; 2; -1)$ .

Vậy  $a = 2, b = 2, c = -1 \Rightarrow a+2b-3c = 2+2.2-3.(-1) = 9$

**Câu 14:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): ax+by+cz-1=0$  với  $c < 0$  đi qua 2 điểm  $A(0;1;0); B(1;0;0)$  và tạo với  $(Oyz)$  một góc  $60^\circ$ . Tính tổng  $a+b+c$ ? (Làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,59**

Mặt phẳng  $(P)$  đi qua 2 điểm  $A, B$  nên ta có:  $\begin{cases} b-1=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$

Và  $(P)$  tạo với  $(Oyz)$  một góc  $60^\circ$  nên  $\cos((P); (Oyz)) = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2} \quad (*)$

Thay  $a=b=1$  vào phương trình  $(*)$  được:  $\sqrt{2+c^2} = 2 \Rightarrow c = -\sqrt{2}$

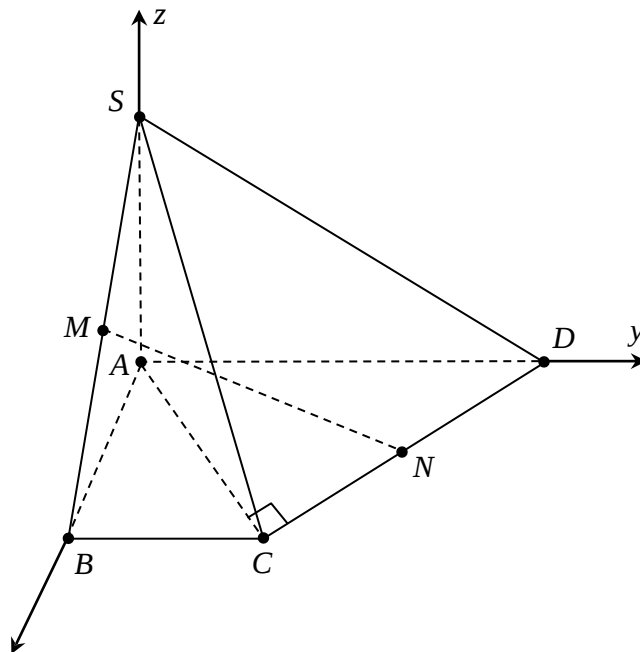
Khi đó:  $a+b+c = 2-\sqrt{2} \approx 0,59$

**Câu 15:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ , thỏa mãn điều kiện,  $AB = BC = a$ ,  $AD = 2a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt đáy  $(ABCD)$ ,  $SA = a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SB, CD$ . Tính cosin của góc giữa  $MN$  và  $(SAC)$ . (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,74**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Chọn đơn vị là  $a$

Có  $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;2;0), S(0;0;1), M\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right), N\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};0\right)$ .

Vecto chỉ phương của  $MN$  là  $\overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = (0; 3; -1)$

Vecto pháp tuyến của  $(SAC)$  là  $\vec{n} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}] = (1; -1; 0)$

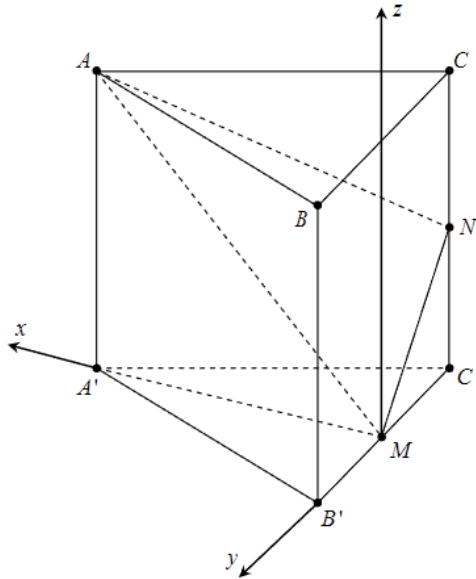
Vậy  $\sin(MN, (SAC)) = \frac{|3|}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

Suy ra:  $\cos(MN, (SAC)) = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{10} \approx 0,74$

**Câu 16:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = AC = a$ ,  $BAC = 120^\circ$ ,  $AA' = a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $B'C'$  và  $CC'$ . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng  $(AMN)$  và  $(ABC)$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,43**



Chọn hệ toạ độ  $Oxyz$  trong không gian như hình vẽ, gốc toạ độ  $O$  trùng với điểm  $M$ .

$$\text{Ta có } MB' = MC' = A'B' \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$MA' = A'B' \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}.$$

$$\Rightarrow M(0;0;0), N\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right), A\left(\frac{a}{2}; 0; a\right).$$

$(ABC)$  có một vector pháp tuyến là  $\vec{k} = (0;0;1)$ .

$$\overrightarrow{MA} = \left(\frac{a}{2}; 0; a\right) \text{ cùng phương với } \vec{u}_1 = (1;0;2).$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right) \text{ cùng phương với } \vec{u}_2 = (0; -\sqrt{3}; 1).$$

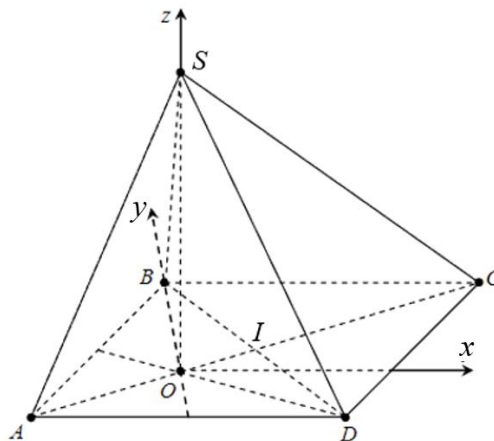
$$\Rightarrow (AMN) \text{ có một vector pháp tuyến } \vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2\sqrt{3}; -1; -\sqrt{3}).$$

$$\text{Gọi } \alpha \text{ là góc giữa hai mặt phẳng } (AMN) \text{ và } (ABC), \text{ ta có } \cos \alpha = \left| \cos(\vec{k}, \vec{n}) \right| = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

**Câu 17:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm  $I$ , cạnh  $a$ , góc  $BAD = 60^\circ$ ,  $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa đường thẳng  $SD$  và mặt phẳng  $(SBC)$ . Tính  $\sin \alpha$ .  
(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,75**



Vì  $ABCD$  là hình thoi và  $BAD = 60^\circ$  nên tam giác  $ABD$  là tam giác đều.

$SA = SB = SD$  nên  $S$  nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABD$ .

Gọi  $O$  là tâm của tam giác đều  $ABD$ , khi đó  $SO \perp (ABD)$ .

$$\text{Ta có } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  trong không gian sao cho  $O(0;0;0)$ ,  $B\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$ ,  $S\left(0;0; \frac{\sqrt{15}}{6}\right)$ .

$$\text{Suy ra } D\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right), C\left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = (1; 0; 0), \overrightarrow{BS} = \left(0; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{15}}{6}\right).$$

Ta có  $[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BS}] = \left(0; -\frac{\sqrt{15}}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ , suy ra  $\vec{n} = (0; -\sqrt{15}; -2\sqrt{3})$  là vector pháp tuyến của  $(SBC)$ .

.

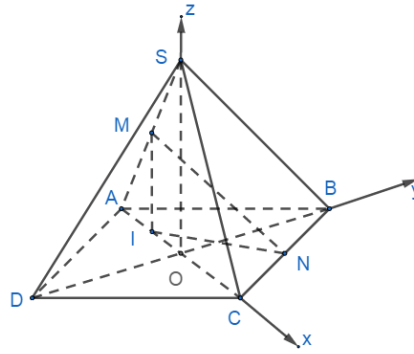
$$\overrightarrow{SD} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{\sqrt{15}}{6}\right) \text{ suy ra } \vec{u} = (3; -\sqrt{3}; -\sqrt{15}) \text{ là vector chỉ phương của } SD.$$

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{|3\sqrt{5} + 6\sqrt{5}|}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{27}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

**Câu 18:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , tâm  $O$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $SA$  và  $BC$ , biết  $MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ . Gọi  $\varphi$  là góc giữa đường thẳng  $MN$  và mặt phẳng  $(SBD)$ . Tính  $\sin \varphi$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,58**



Gọi  $I$  là hình chiếu của  $M$  lên  $(ABCD)$ , suy ra  $I$  là trung điểm của  $AO$ .

$$\text{Khi đó } CI = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Xét  $\triangle CNI$  có:  $CN = \frac{a}{2}$ ,  $NCI = 45^\circ$ .

$$NI = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN \cdot CI \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{8} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Xét } \triangle MIN \text{ vuông tại } I \text{ nên } MI = \sqrt{MN^2 - NI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - \frac{5a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

$$\text{Mà } MI \parallel SO, MI = \frac{1}{2}SO \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ:

$$\text{Ta có } O(0;0;0), B\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), D\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), N\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right),$$

$$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), S\left(0; 0; \frac{\sqrt{14}}{2}\right), M\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{\sqrt{14}}{4}\right).$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{MN} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{14}}{4}\right), \overrightarrow{SB} = \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right), \overrightarrow{SD} = \left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right).$$

Ta có  $[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}] = (-\sqrt{7}; 0; 0)$  suy ra mặt phẳng  $(SBD)$  có vectơ pháp tuyến  $\vec{n} = (1, 0, 0)$ .

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{MN}|} = \frac{\left|1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{1} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

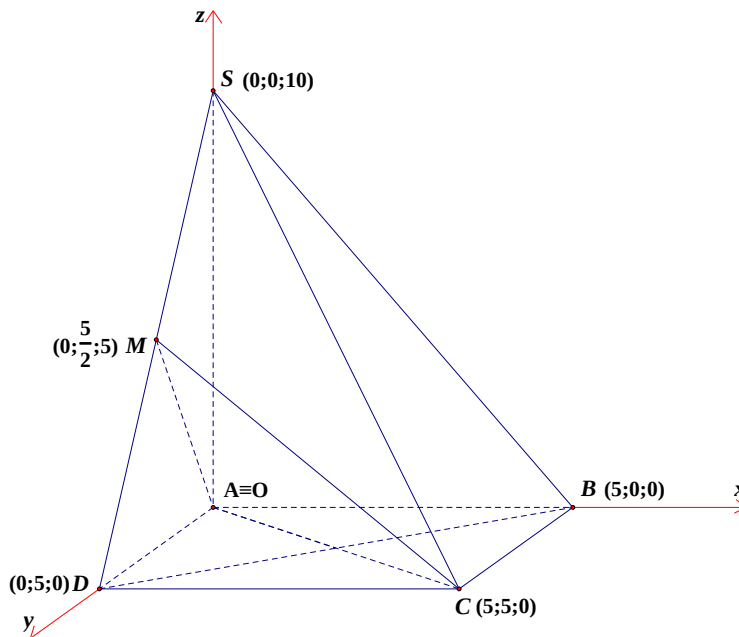
**Câu 19:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $5a$ , cạnh bên  $SA = 10a$  và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $SD$ . Góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(AMC)$  và  $(SBC)$  có tan bằng (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,89

Chuẩn hóa với  $a = 1$ .

Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ sau:



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

$$A(0;0;0); D(0;5;0); B(5;0;0); C(5;5;0); S(0;0;10); M\left(0; \frac{5}{2}; 5\right).$$

$$\overrightarrow{BC} = (0;5;0), \overrightarrow{BS} = (-5;0;10).$$

$$[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BS}] = (50;0;25) \Rightarrow \text{một vectơ pháp tuyến của } (SBC) \text{ là } \vec{n}_1 = (2;0;1).$$

$$\overrightarrow{AC} = (5;5;0), \overrightarrow{AM} = \left(0; \frac{5}{2}; 5\right).$$

$$[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}] = \left(25; -25; \frac{25}{2}\right) \Rightarrow \text{một vectơ pháp tuyến của } (AMC) \text{ là } \vec{n}_2 = (2; -2; 1).$$

Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(AMC)$  và  $(SBC)$ .

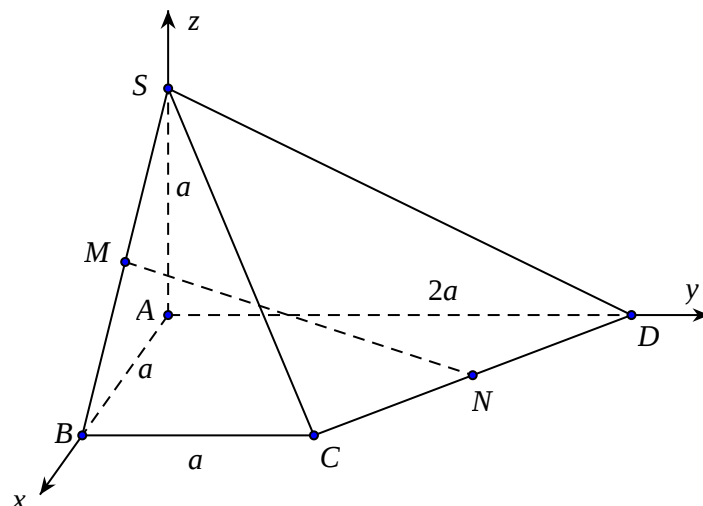
$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{5}{3\sqrt{5}}.$$

$$\text{Suy ra: } \tan \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^2} - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,89.$$

**Câu 20:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ ,  $AB = BC = a$ ,  $AD = 2a$ ; cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy và  $SA = a$ . Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của  $SB$ ,  $CD$ . Cosin của góc giữa  $MN$  và  $(SAC)$  là (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,74



Chọn hệ trục  $Oxyz$  như hình vẽ, với  $O \equiv A$ .

Tọa độ các đỉnh của hình chóp là :  $A(0;0;0)$ ,  $B(a;0;0)$ ,  $C(a;a;0)$ ,  $D(0;2a;0)$ ,  $S(0;0;a)$ .

$$\Rightarrow M\left(\frac{a}{2}; 0; \frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a}{2}; \frac{3a}{2}; 0\right).$$

Ta có:  $-\frac{1}{a}\overrightarrow{SA} = (0;0;1) = \vec{u}$ ;  $\frac{1}{a}\overrightarrow{SC} = (1;1;-1) = \vec{v}$ .

Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(SAC)$  là  $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-1;1;0)$ .

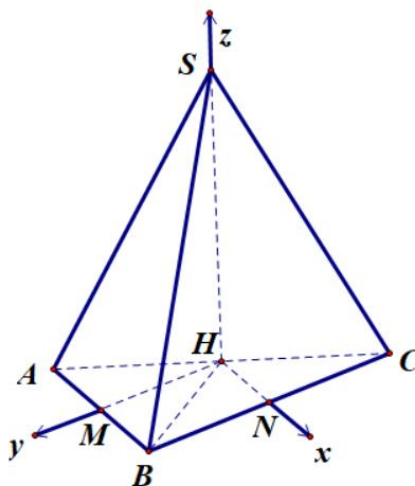
Lại có:  $\frac{2}{a}\overrightarrow{MN} = (0;3;-1) = \vec{w}$ .

Gọi  $\alpha$  là góc giữa  $MN$  và  $(SAC)$  ta có:  $\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{w}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{55}}{10} \approx 0,74$ .

**Câu 21:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$ ,  $AB=1, BC=\sqrt{3}$ ,  $\triangle SAC$  đều, mặt phẳng  $(SAC)$  vuông với đáy. Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SBC)$ . Giá trị của  $\cos \alpha$  bằng (làm tròn đến hàng phần trăm).

**Lời giải**

**Trả lời:** 0,12



Gọi  $H, M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC, AB, BC$ .

$$(SAC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp HM, SH \perp HN.$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } B \Rightarrow HM \perp HN.$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } B \Rightarrow AC = 2 \Rightarrow SH = \sqrt{3}.$$

$$HM = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}; HN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}.$$

Chọn hệ trục tọa độ như sau:  $H(0;0;0); S(0;0;\sqrt{3}); M\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right); N\left(\frac{1}{2};0;0\right), B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$$\overrightarrow{BM} = \left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right) \quad \overrightarrow{BN} = \left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\overrightarrow{BS} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right) \quad \overrightarrow{BS} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right)$$

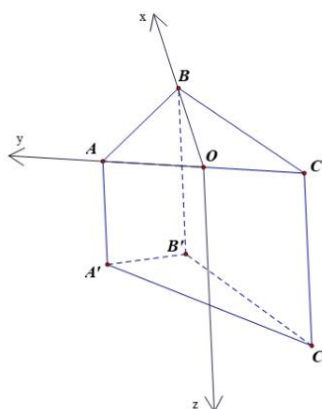
$$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BS}] = \left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right); \vec{n}_2 = [\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BS}] = \left(-\frac{3}{2}; 0; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{\left| -\frac{3}{16} \right|}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{16}} \cdot \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{16}}} = \frac{\sqrt{65}}{65} \approx 0,12.$$

**Câu 22:** Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 4m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi ( thẳng ) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 8m; 8,8m; 9,6m. Biết đáy bể là phẳng. Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc là (làm tròn tới hàng phần mười)(độ)

**Lời giải**

**Trả lời:** 21,8



Gọi 3 điểm ở trên mặt nước lần lượt là  $A, B, C$  và ba điểm tương ứng ở đáy bể là  $A', B', C'$  sao cho  $AA' = 8m, BB' = 8,8m, CC' = 9,6m$ . Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ,  $O$  là trung điểm của  $AC$

Ta có  $A(0; 2; 0), B(2\sqrt{3}; 0; 0), C(0; -2; 0), A'(0; 2; 8), B'(2\sqrt{3}; 0; 8,8), C'(0; -2; 9,6)$ .

Ta có  $\overrightarrow{A'B'} = (2\sqrt{3}; -2; 0,8), \overrightarrow{A'C'} = (0; -4; 1,6)$ .

$$\text{Có } [\overline{A'B'}, \overline{A'C'}] = \left( \begin{vmatrix} -2 & 0,8 \\ -4 & 1,6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0,8 & 2\sqrt{3} \\ 1,6 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \right) = \left( 0; \frac{-16\sqrt{3}}{5}; -8\sqrt{3} \right).$$

Mặt phẳng đáy bể là mặt phẳng  $(A'B'C')$  có một vector pháp tuyến là  $\vec{n} = (0; \frac{-16\sqrt{3}}{5}; -8\sqrt{3})$ .

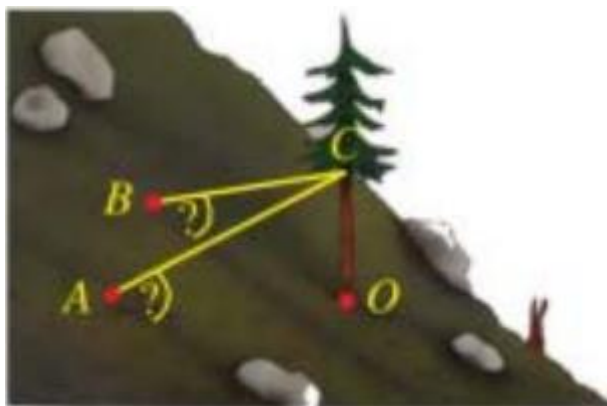
Mặt phẳng nằm ngang (mặt nước) chính là mặt phẳng  $(Oxy) : z = 0$  có một vector pháp tuyến là:  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .

Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai mặt phẳng đáy và mặt nước. Khi đó:

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}; \vec{k}) \right| = \frac{|-8\sqrt{3}|}{\sqrt{\left(\frac{-16\sqrt{3}}{5}\right)^2 + (-8\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{5\sqrt{29}}{29}.$$

Đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc là (làm tròn tới hàng phần chục): 21,8 (độ).

**Câu 23:** Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như hình vẽ. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm gốc  $O$  (gốc cây thông) và  $A, B$  (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(5; -3; 1)$ ,  $B(-3; -4; 2)$ , đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm  $C(0; 0; 5)$  và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng. Khi đó, góc tạo bởi dây neo  $CA$  và mặt phẳng sườn núi là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?



**Lời giải**

**Trả lời:** 37

Ta có  $\overline{OA} = (5; -3; 1)$ ,  $\overline{OB} = (-3; -4; 2)$  nên

$$[\overline{OA}, \overline{OB}] = \left( \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \right) = (-2; -13; -11).$$

Suy ra vector  $\vec{n} = [\overline{OA}, \overline{OB}] = (-2; -13; -11)$  là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng  $(OAB)$ .

Mặt khác  $\overline{CA} = (5; -3; -4)$  nên ta có

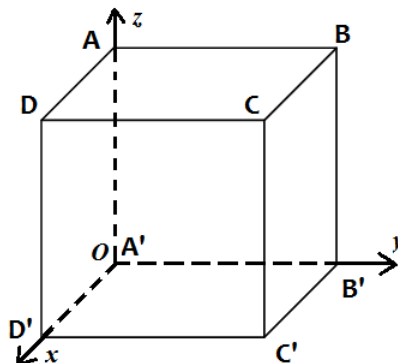
$$\sin(CA, (OAB)) = \left| \cos(\overline{CA}, \vec{n}) \right| = \frac{|\overline{CA} \cdot \vec{n}|}{|\overline{CA}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|5 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-13) + (-4) \cdot (-11)|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-13)^2 + (-11)^2}} = \frac{73}{70\sqrt{3}}$$

Suy ra  $(CA, (OAB)) \approx 37^\circ$ . Vậy góc tạo bởi dây neo  $CA$  và mặt phẳng sườn núi khoảng  $37^\circ$ .

**Câu 24:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh  $3a$ . Tính góc giữa hai mặt phẳng  $(A'B'CD)$  và  $(ACC'A')$ . (đơn vị độ)

**Lời giải**

**Trả lời: 60**



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho gốc tọa độ  $O \equiv A'$ ,  $Ox \equiv A'D'$ ,  $Oy \equiv A'B'$ ,  $Oz \equiv A'A$ .

Khi đó:  $A'(0;0;0)$ ,  $D'(3a;0;0)$ ,  $B'(0;3a;0)$ ,  $C'(3a;3a;0)$ ,

$A(0;0;3a)$ ,  $D(3a;0;3a)$ ,  $B(0;3a;3a)$ ,  $C(3a;3a;3a)$ .

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (0;3a;0)$ ,  $\overrightarrow{A'D'} = (3a;0;3a)$ ,  $\overrightarrow{A'A} = (0;0;3a)$ ,  $\overrightarrow{A'C'} = (3a;3a;0)$ .

$[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D'}] = (3a^2; 0; -3a^2)$ .

Chọn  $\vec{n}_1 = (1; 0; -1)$  là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(A'B'CD)$ .

$[\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'C'}] = (-3a^2; 3a^2; 0)$ .

Chọn  $\vec{n}_2 = (-1; 1; 0)$  là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(ACC'A')$ .

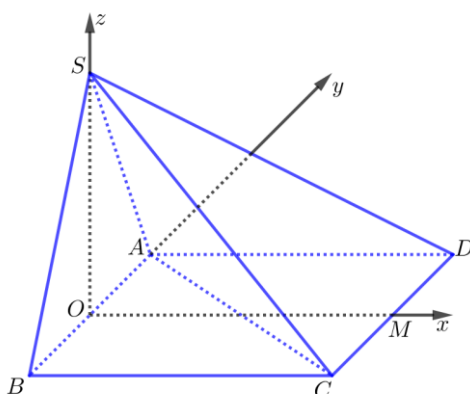
Góc giữa hai mặt phẳng  $(A'B'CD)$  và  $(ACC'A')$  là:

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

**Câu 25:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $2a$ ,  $SAB$  là tam giác đều và  $(SAB)$  vuông góc với  $(ABCD)$ . Tính  $\cos \varphi$  với  $\varphi$  là góc tạo bởi  $(SAC)$  và  $(SCD)$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,71**



Gọi  $O, M$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Vì  $SAB$  là tam giác đều và  $(SAB)$  vuông góc với  $(ABCD)$  nên  $SO \perp (ABCD)$ .

Chuẩn hóa cho  $a = 1$

Xét hệ trục  $Oxyz$  có  $O(0;0;0), M(2;0;0), A(0;1;0), S(0;0;\sqrt{3})$ . Khi đó  $C(2;-1;0), D(2;1;0)$ .

Suy ra  $\overrightarrow{SA} = (0;1;-\sqrt{3}), \overrightarrow{AC} = (2;-2;0), \overrightarrow{SC} = (2;-1;-\sqrt{3}), \overrightarrow{CD} = (0;2;0)$ .

Mặt phẳng  $(SAC)$  có véc tơ pháp tuyến  $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AC}] = (-2\sqrt{3}; -2\sqrt{3}; -2)$ .

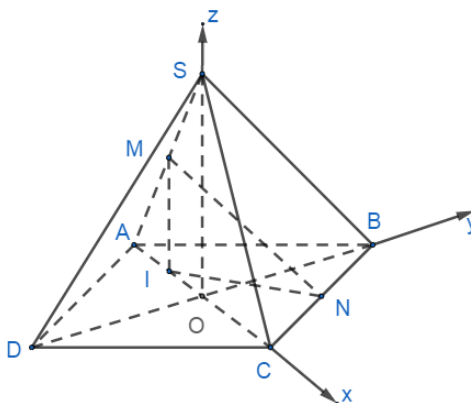
Mặt phẳng  $(SAD)$  có véc tơ pháp tuyến  $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{AD}] = (2\sqrt{3}; 0; 4)$ .

$$\text{Vậy } \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{5}{7}.$$

**Câu 26:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $2a$ , tâm  $O$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $SA$  và  $BC$ , biết  $MN = a\sqrt{6}$ . Tính giá trị sin của góc giữa đường thẳng  $MN$  và mặt phẳng  $(SBD)$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,58**



Gọi  $I$  hình chiếu của  $M$  lên  $(ABCD)$ , suy ra  $I$  là trung điểm của  $AO$ .

$$\text{Khi đó } CI = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Xét  $\triangle CNI$  có:  $CN = a$ ,  $\angle NCI = 45^\circ$ .

Áp dụng định lý cosin ta có:

$$NI = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN \cdot CI \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{2} - 2a \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle MIN \text{ vuông tại } I \text{ nên } MI = \sqrt{MN^2 - NI^2} = \sqrt{6a^2 - \frac{10a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

$$\text{Mà } MI \parallel SO, MI = \frac{1}{2}SO \Rightarrow SO = a\sqrt{14}.$$

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ: (chuẩn hóa cho  $a = 1$ )

Ta có:  $O(0;0;0)$ ,  $B(0;\sqrt{2};0)$ ,  $D(0;-\sqrt{2};0)$ ,  $C(\sqrt{2};0;0)$ ,  $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ ,

$A(-\sqrt{2};0;0)$ ,  $S(0;0;\sqrt{14})$ ,  $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$ .

Khi đó  $\overrightarrow{MN} = \left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{SB} = (0;\sqrt{2};-\sqrt{14})$ ,  $\overrightarrow{SD} = (0;-\sqrt{2};-\sqrt{14})$ .

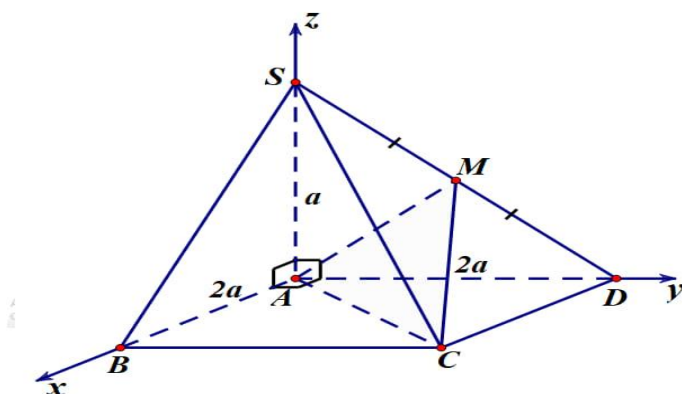
Vectơ pháp tuyến mặt phẳng  $(SBD)$ :  $\vec{n} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}] = (-4\sqrt{7}; 0; 0)$ .

Suy ra  $\sin(MN, (SBD)) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-4\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}|}{4\sqrt{7} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Câu 27:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $2a$ , cạnh bên  $SA = a$  và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $SD$ . Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(AMC)$  và  $(SBC)$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,45**



Chọn hệ trục tọa độ sao cho  $A \equiv O$ , như hình vẽ:

Khi đó ta có:

$A(0;0;0)$ ,  $B(2a;0;0)$ ,  $D(0;2a;0)$ ,  $C(2a;2a;0)$ ,  $S(0;0;a)$ ,  $M\left(0;a;\frac{a}{2}\right)$ .

$\overrightarrow{SB} = (2a;0;-a)$ ,  $\overrightarrow{SC} = (2a;2a;-a)$ ,  $\overrightarrow{MA} = \left(0;-a;-\frac{a}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{MC} = \left(2a;a;-\frac{a}{2}\right)$ .

$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (2a^2; 0; 4a^2)$  và  $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}] = (a^2; -a^2; 2a^2)$ .

Gọi  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ) là góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(AMC)$  và  $(SBC)$ .

ta có  $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2a^2 \cdot a^2 + 4a^2 \cdot 2a^2|}{\sqrt{(2a^2)^2 + (4a^2)^2} \cdot \sqrt{(a^2)^2 + (-a^2)^2 + (2a^2)^2}}$

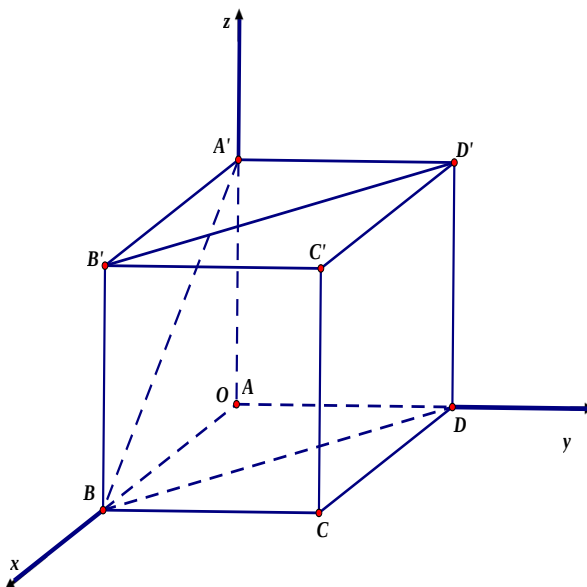
$$= \frac{10a^4}{\sqrt{20 \cdot 6 \cdot (a^4)^2}} = \frac{5}{\sqrt{30}}.$$

$$\text{Mà } \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \left( \frac{\sqrt{30}}{5} \right)^2 - 1 = \frac{5}{25}. \text{ Suy ra } \tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

**Câu 28:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng  $2a$ . gọi  $\alpha$  là góc giữa đường thẳng  $A'B$  và mặt phẳng  $(BB'D'D)$ . Tính  $\sin \alpha$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 0,5**



+) Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với  $A \equiv O(0;0;0), B(2a;0;0), C(2a;2a;0), D(0;2a;0), A'(0;0;2a), B'(2a;0;2a), C'(2a;2a;2a), D'(0;2a;2a)$ .

+) Ta thấy  $OC \perp (BB'D'D)$  và  $\overrightarrow{OC} = (2a; 2a; 0)$  nên suy ra mặt phẳng  $(BB'D'D)$  có một vector pháp tuyến là  $\vec{n} = (1; 1; 0)$ .

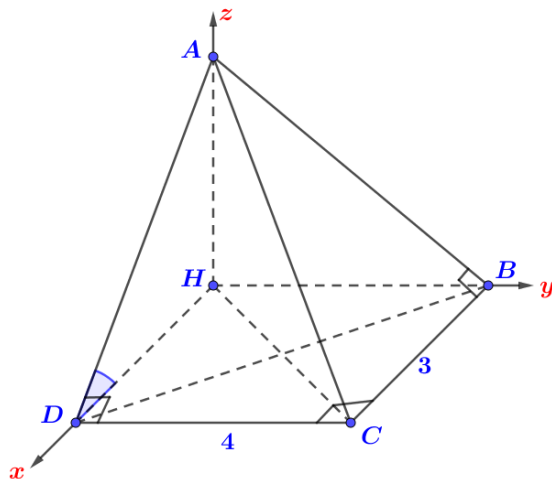
+) Đường thẳng  $A'B$  có vector chỉ phương là  $\overrightarrow{A'B} = (2a; 0; -2a)$  ta chọn  $\vec{u} = (1; 0; -1)$ .

$$\text{+) Ta có } \sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

**Câu 29:** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $BC = 3, CD = 4, ABC = BCD = ADC = 90^\circ, (AD, BC) = 60^\circ$ . Tính Cosin của góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(ACD)$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,3**



Gọi  $H$  là chân đường cao của tứ diện  $ABCD$ .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp HB. (1)$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp HD. (2)$$

Mà  $BCD = 90^\circ$ .

Từ đây ta suy ra  $HBCD$  là hình chữ nhật.

Mặt khác:  $(AD, BC) = (AD, HD) = ADH = 60^\circ$ . Suy ra:  $AH = HD \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$ .

Chọn hệ trục  $Oxyz \equiv H.DBA$  như hình vẽ.

Ta có:  $H(0;0;0)$ ,  $A(0;0;3\sqrt{3})$ ,  $B(0;4;0)$ ,  $D(3;0;0)$ ,  $C(3;4;0)$

$$\overrightarrow{AD} = (3;0;-3\sqrt{3}), \overrightarrow{AC} = (3;4;-3\sqrt{3}), \overrightarrow{AB} = (0;4;-3\sqrt{3}).$$

Gọi  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  lần lượt là một véc tơ pháp tuyến của  $(ABC)$  và  $(ABD)$ .

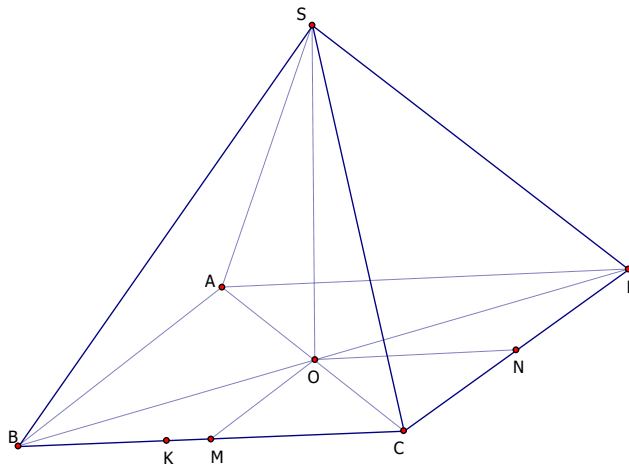
$$\text{Suy ra: } \vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -9\sqrt{3}; -12); \vec{n}_2 = [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}] = (12\sqrt{3}; 0; 12).$$

$$\text{Vậy } \cos((ABC), (ADC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|0 \cdot 12\sqrt{3} - 9\sqrt{3} \cdot 0 - 12 \cdot 12|}{\sqrt{0^2 + (-9\sqrt{3})^2 + (-12)^2} \cdot \sqrt{(12\sqrt{3})^2 + 0^2 + (12)^2}} = \frac{2\sqrt{43}}{43}$$

**Câu 30:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có  $SA = 2a$ ;  $AB = a$ . Gọi  $N$ ,  $M$  lần lượt là trung điểm của  $DC$  và  $BC$ , tính cosin góc giữa hai đường thẳng  $SM$  và  $MN$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,18**



$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  sao cho  $OM \equiv Ox$ ,  $ON \equiv Oy$ ,  $OS \equiv Oz$

$$\text{Khi đó } S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{14}}{2}\right); M\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right); N\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$$

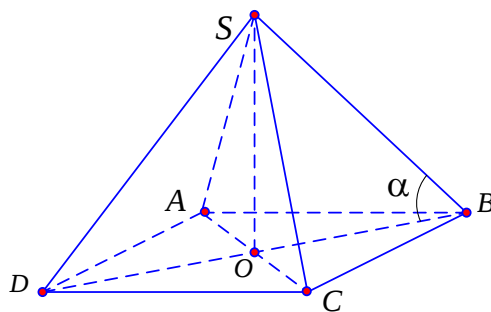
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{SM} = \left(\frac{a}{2}; 0; -\frac{a\sqrt{14}}{2}\right); \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$$

$$\cos(SM, MN) = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{SM}| \cdot |\overrightarrow{MN}|} = \frac{\sqrt{30}}{30}$$

**Câu 31:** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có  $AB = a$ . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng  $(SCD)$  và  $(SBC)$  biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng  $60^\circ$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,14**



Góc giữa  $SB$  và mặt đáy là góc  $SBO = 60^\circ$

$$SO = \tan 60 \cdot OB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  sao cho  $OC \equiv Ox$ ,  $OB \equiv Oy$ ,  $OS \equiv Oz$ .

$$\text{Khi đó } S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{6}}{2}\right); B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right); C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right); D\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$$

$$\text{Suy ra vector pháp tuyến của mặt phẳng } (SBC) \text{ là } \vec{n} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = \left(\frac{-\sqrt{3}a^2}{2}; -\frac{\sqrt{3}a^2}{2}; -\frac{a^2}{2}\right)$$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng (SDC) là  $\vec{a} = [\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SC}] = \left( \frac{\sqrt{3}a^2}{2}; -\frac{\sqrt{3}a^2}{2}; \frac{a^2}{2} \right)$

Do đó cosin góc giữa hai mặt phẳng trên là  $\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{1}{7}$ .

**Câu 32:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $2a$ ,  $SA = a$ ;  $SB = a\sqrt{3}$  và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC$ . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  $SM, DN$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

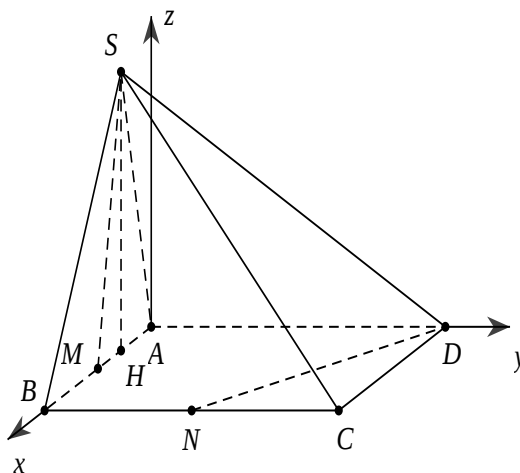
**Lời giải**

**Trả lời: 0,45**

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $S$  lên  $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ .

Ta có:  $SA^2 + SB^2 = AB^2 \Rightarrow SA \perp SB \Rightarrow AH = \frac{SA^2}{AB} = \frac{a}{2}$ ,  $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có tọa độ các điểm:



$A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0), C(2a;2a;0), H\left(\frac{a}{2};0;0\right), S\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), M(a;0;0), N(2a;a;0)$

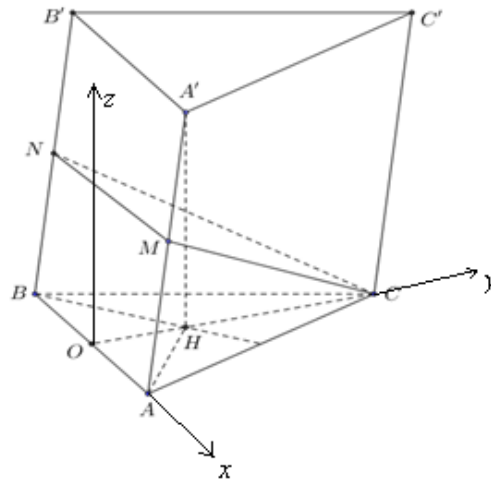
Vì  $\overrightarrow{SM} = \left(\frac{a}{2}; 0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{DN} = (2a; -a; 0) \Rightarrow \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN} = a^2$ .

Vậy  $\cos(SM, DN) = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{DN}|}{|\overrightarrow{SM}| \cdot |\overrightarrow{DN}|} = \frac{a^2}{a \cdot a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Câu 33:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có  $A'.ABC$  là tứ diện đều cạnh  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AA'$  và  $BB'$ . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN). (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,89**



Gọi  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Gắn hệ trục tọa độ sao cho  $O(0;0;0)$  như hình và không mất tính tổng quát ta chọn  $a = 1$ , khi đó ta có:

$$A\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), H\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right)$$

$$A'H = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow A'\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow B'\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ . Dễ thấy  $(ABC)$  có vtpt  $\vec{n}_1 = (0; 0; 1)$ .

$$M \text{ là trung điểm } AA' \Rightarrow M\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right), N \text{ là trung điểm } BB' \Rightarrow N\left(-\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = (-1; 0; 0), \overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{4}; -\frac{5\sqrt{3}}{12}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

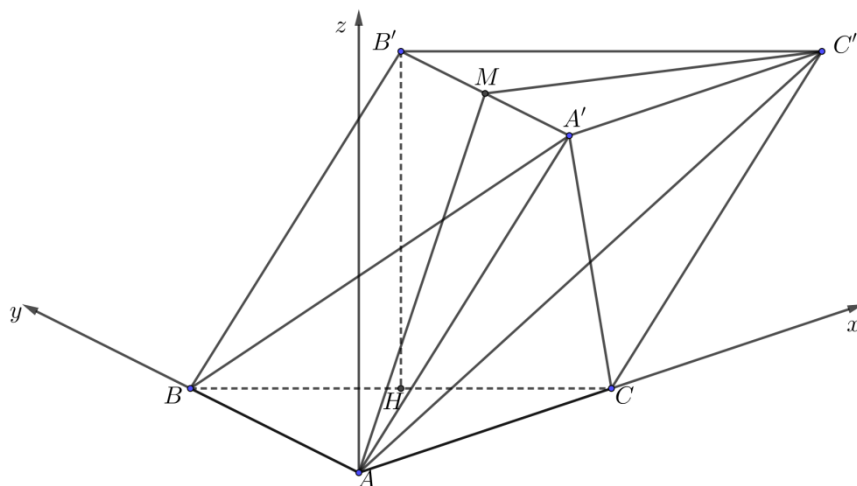
$$\Rightarrow (CMN) \text{ có vtpt } \vec{n}_2 = \left(0; \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{5\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}(0; 2\sqrt{2}; 5)$$

$$\cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{33}} \Rightarrow \tan \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

**Câu 34:** Cho hình lăng trụ tam giác  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $AA' = \frac{\sqrt{61}}{2}$ . Hình chiếu của  $B'$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm cạnh  $BC$ ,  $M$  là trung điểm cạnh  $A'B'$ . Tính cosin của góc tạo bởi mặt phẳng  $(AMC')$  và mặt phẳng  $(A'BC)$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,59**



Gọi  $H$  là trung điểm  $BC$ .

Ta có:  $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5$

Xét tam giác  $B'BH$  vuông tại  $H$ :  $B'H = \sqrt{BB'^2 - BH^2} = 3$ .

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  có  $A$  trùng với  $O$  như hình vẽ

Với  $A(0;0;0)$ ,  $B(0;3;0)$ ,  $C(4;0;0) \Rightarrow H\left(2; \frac{3}{2}; 0\right)$  là trung điểm  $BC \Rightarrow B'\left(2; \frac{3}{2}; 3\right)$

Do  $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow A'\left(2; -\frac{3}{2}; 3\right)$ ;  $C'\left(6; -\frac{3}{2}; 3\right) \Rightarrow M(2; 0; 3)$

$\overrightarrow{AM} = (2; 0; 3)$ ;  $\overrightarrow{AC'} = \left(6; -\frac{3}{2}; 3\right)$  nên vector pháp tuyến  $(MAC')$  là  $\vec{n}_{(MAC')} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC'}]$   
 $= \left(\frac{9}{2}; 12; -3\right)$

$\overrightarrow{A'B} = \left(-2; \frac{9}{2}; -3\right)$ ;  $\overrightarrow{A'C} = \left(2; \frac{3}{2}; -3\right)$  nên vector pháp tuyến  $(A'BC)$  là  $\vec{n}_{(A'BC)} = [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}]$   
 $= (-9; -12; -12)$

Gọi  $\varphi$  là góc tạo bởi mặt phẳng  $(AMC')$  và mặt phẳng  $(A'BC)$ .

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_{(MAC')} \cdot \vec{n}_{(A'BC)}|}{|\vec{n}_{(MAC')}| \cdot |\vec{n}_{(A'BC)}|} = \frac{\left|\frac{9}{2} \cdot (-9) + 12 \cdot (-12) - 3 \cdot (-12)\right|}{\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 12^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-9)^2 + (-12)^2 + (-12)^2}} = \frac{33}{\sqrt{3157}}.$$

**Câu 35:** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$ . Biết khoảng cách giữa  $AB$  và  $B'C$  bằng  $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ ,

khoảng cách giữa  $BC$  và  $AB'$  bằng  $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ , khoảng cách giữa  $AC$  và  $BD'$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

Gọi  $M$  là trung điểm  $B'C$ . Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(BMD)$  và  $(B'AD)$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

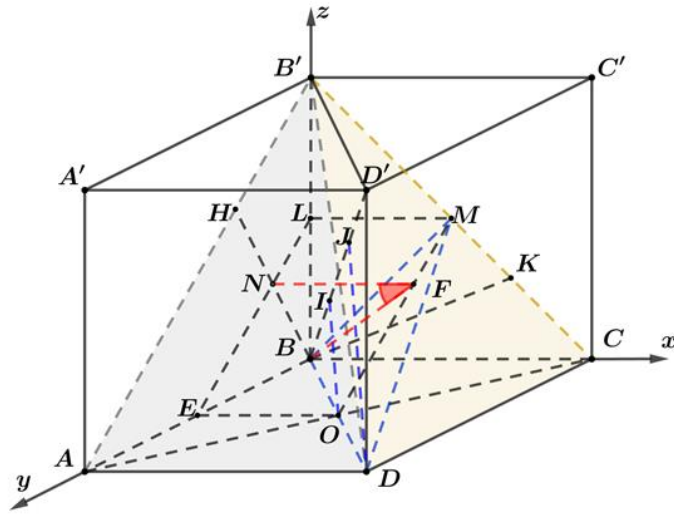
**Trả lời: 0,89**

Đặt  $BA = x$ ,  $BC = y$ ,  $BB' = z$ . Gọi  $O$  là tâm  $ABCD$ .

Ta có  $AB \parallel (B'DC) \Rightarrow d(AB, B'C) = d(AB, (B'DC)) = d(B, (B'DC))$ .

Ta dễ dàng chứng minh được  $(B'DC) \perp (BB'C'C)$  và cắt nhau theo giao tuyến  $B'C$ .

Kẻ  $BK \perp B'C \Rightarrow BK \perp (B'DC)$ , hay  $d(AB, B'C) = BK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ .



Xét  $\triangle BB'C$  vuông tại B, ta có  $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BB'^2} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{5}{4a^2}$  (1).

Lại có  $BC \parallel (B'AD) \Rightarrow d(BC, AB') = d(BC, (B'AD)) = d(B, (B'AD))$ .

Ta dễ dàng chứng minh được  $(B'AD) \perp (BB'A'A)$  và cắt nhau theo giao tuyến  $AB'$ . Kẻ

$BH \perp AB' \Rightarrow BH \perp (B'AD)$ , hay  $d(BC, AB') = BH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ .

Xét  $\triangle BB'A$  vuông tại B, ta có  $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BB'^2} \Leftrightarrow \frac{5}{4a^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}$  (2).

Từ (1) và (2), suy ra  $x = y$ , hay  $ABCD$  là hình vuông.

Ta dễ dàng chứng minh  $AC \perp (BB'D'D)$ . Kẻ  $OI \perp BD'$ , suy ra  $AC \perp OI$ , hay  $OI$  là đoạn

vuông góc chung của  $AC$  và  $BD'$ , suy ra  $d(AC, BD') = OI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

Trong  $(BB'D'D)$ , kẻ  $DJ \parallel OI (J \in BD) \Rightarrow DJ = 2OI = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$  (vì  $OI$  là đường trung bình  $\triangle BDD'$ ).

Xét  $\triangle BDD'$  vuông tại D, ta có  $\frac{1}{DJ^2} = \frac{1}{BD^2} + \frac{1}{DD'^2} \Leftrightarrow \frac{3}{4a^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{z^2}$  (3).

Giải (2), (3) ta được  $x = a, z = 2a$ . Chuẩn hóa cho  $a = 1$ .

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  như hình vẽ với:  $B(0;0;0)$ ,  $B'(0;0;2)$ ,  $C(1;0;0)$ ,  $A(0;1;0)$ ,  $D(1;1;0)$

$M$  là trung điểm  $B'C$ , suy ra  $M\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ .

+) Ta có  $\overrightarrow{B'A} = (0;1;-2)$ ,  $\overrightarrow{B'D} = (1;1;-2)$ ,  $[\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'D}] = (0;-2;-1)$ .

Suy ra mặt phẳng  $(B'AD)$  có một vectơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (0; 2; 1)$ .

+) Ta có  $\overrightarrow{BM} = \left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ ,  $\overrightarrow{BD} = (1; 1; 0)$ ,  $[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BD}] = \left(-1; 1; \frac{1}{2}\right)$ .

Suy ra mặt phẳng  $(BMD)$  có một vectơ pháp tuyến là  $\vec{n}' = (-2; 2; 1)$ .

Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(BMD)$  và  $(B'AD)$ , ta có:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot 3} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$